אלגברה לינארית 2

הרצאה 6

שרון גל sharon.gal.math@gmail.com

תזכורת

מטריצה היא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \sim A$$

הגדרה:

- תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$.
- נאמר ש-A **לכסינה** ($diagonalizable$) אם קיימת מטריצה אלכסונית $D \in M_n(\mathrm{F})$ וקיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathrm{F})$ כך ש- $\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$

הגדרות:

- תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$, יהי $\lambda \in \mathrm{F}$.
- נאמר ש-$\boldsymbol{\lambda}$ הוא **ערך עצמי** של A אם קיים $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathrm{F}^n$ כך ש- $\boxed{\boldsymbol{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}}$
- $\boldsymbol{\vec{v}}$ נקרא **הוקטור העצמי** של A המתאים לערך העצמי λ.
- הזוג הסדור $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\vec{v}})$ נקרא **זוג עצמי** של A.

תזכורת

משפט - תנאי שקול ללכסינות:

- תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$. אזי:
- A לכסינה אם ורק אם קיים בסיס $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathrm{F}^n$ של וקטורים עצמיים של A.
- בנוסף, אם $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathrm{F}$ הם הע״ע של A בהתאמה ואם נבחר את $P = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ אזי $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

משפט:

תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathrm{F}$ k ערכים עצמיים **שונים** של A ויהיו $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathrm{F}^n$ וקטורים עצמיים המתאימים להם. כלומר $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ לכל $1 \le i \le k$.

אזי $v_1, \dots, v_k$ בת״ל.

תזכורת

איך הכל מתחבר? אם A לכסינה, אז היא דומה למטריצה אלכסונית D ומתקיים:

$$D = P^{-1}AP$$

(P נקראת גם המטריצה המלכסנת)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

בסיס ל-F^n

הגדרה:

- יהי F שדה, תהי $\lambda \in F$ ותהי $A \in M_n(F)$.
- נגדיר את **המרחב העצמי** של A המתאים ל-λ באופן הבא:

$$\boldsymbol{V_\lambda} = \underbrace{\{\vec{v} \in \mathbf{F}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}}_{\text{זו הקבוצה של כל הו"ע של } \lambda \text{ בתוספת וקטור האפס}} \subseteq F^n$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\vec{0} = \lambda \underset{I_n}{\vec{v}} - A\vec{v}$$

$$\vec{0} = (\lambda I_n - A)\vec{v}$$

משפט:

- יהי F שדה, תהי $\lambda \in F$ ותהי $A \in M_n(F)$. אזי: V_λ הוא **תמ"ו** של F^n.
- בנוסף: $\boldsymbol{V_\lambda = Null(\lambda I_n - A)}$

הדטרמיננטה היא פולינום!

הגדרה מקבילה (לא אצלנו!):
$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

הגדרה:

יהי F שדה. תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$.

נגדיר את **הפולינום האופייני של A** באופן הבא: $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$

דוגמאות:

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$$

2. תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

העי"ע הם שורשים של הפולינום האופייני.

$$\boldsymbol{p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)}$$

משפט 1:

יהי F שדה. תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$ ויהי $\lambda \in \mathrm{F}$.

אזי: λ ע"ע של A אם"ם $p_A(\lambda) = 0_{\mathrm{F}}$.

הוכחה:

- לפי הערה 3 בהרצאה 5, λ ערך עצמי של A אם ורק אם $\dim V_\lambda \geq 1$.
- כלומר λ ע"ע אם ורק אם קיים פתרון לא טריוויאלי למשוואה $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.
- לכן:

$$\boxed{\lambda \text{ ערך עצמי של } A} \Leftrightarrow \lambda I_n - A \text{ לא הפיכה} \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0_{\mathrm{F}} \Leftrightarrow \boxed{p_A(\lambda) = 0_{\mathrm{F}}}$$

תרגיל 1:

תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_2(\mathbb{R})$ כך ש-

$P^{-1}AP$ אלכסונית.

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$\boxed{p_A(\lambda) =} \det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{= (\lambda-2)^2}$$

- לכן הערך העצמי היחיד של A הוא $\lambda = 2$.
- כדי לדעת אם יש בסיס של ו"ע נחשב את המרחב העצמי של 2.

- נחשב את המימד של המרחב העצמי של $\lambda = 2$:

$$\boxed{V_\lambda =} \operatorname{Null}(\lambda I_2 - A) =$$

$\lambda = 2$

$$= Null\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = Null\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ניתן לראות ש- $\dim\left(Null\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$
- (לפי המשתנים החופשיים, או לחילופין לפי $n - rank$).
- לכן אין בסיס של וקטורים עצמיים של A.
- כלומר A לא לכסינה ולא קיימת P כנ"ל.

תרגיל 1:

תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_2(\mathbb{R})$ כך ש-

$P^{-1}AP$ אלכסונית.

עוד פתרון: נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$\boxed{p_A(\lambda) =} \det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{= (\lambda - 2)^2}$$

- לכן הערך העצמי היחיד של A הוא $\lambda = 2$.

- נניח בשלילה ש-A לכסינה.
- לכן בהכרח A דומה למטריצה האלכסונית:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ע"ע על האלכסון

- אבל זו מטריצה סקלרית ולפי משפט שהוכחנו היא דומה רק לעצמה.
- בסתירה לכך שהיא דומה ל-A.

תרגיל 2:

תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

חשבו את כל הערכים העצמיים של A. לכל ערך עצמי חשבו את הבסיס למרחב העצמי שלו וקבעו אם A לכסינה.

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{R_3 \to R_3 - R_2}{=} \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{pmatrix} = \quad \text{לפי שורה 3}$$

$$= (\lambda-2)\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda-2)\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)\lambda + (\lambda-2)\big((\lambda-2)(\lambda-3)-2\big) =$$

$$= (\lambda-2)\big(\lambda + (\lambda-2)(\lambda-3) - 2\big) =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda-2)^3$$

- לכן הערך העצמי היחיד של A הוא $\lambda = 2$.
- מכאן כבר ברור ש-A לא לכסינה.
- נניח בשלילה ש-A לכסינה.
- לפי משפט היא דומה ל-$diag(2,2,2)$,

בסתירה לכך ש-$diag(2,2,2)$ דומה רק לעצמה.

- נחשב את המרחב העצמי של $\lambda = 2$:

$$\boxed{V_2 =} \quad \mathrm{Null}(2I_3 - A) =$$

$$= Null\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= Null\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Null\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= Null\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Null\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| y = z \wedge x = 0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\right\} = \boldsymbol{span}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right\}$$

פולינומים

הגדרות:

- יהי F שדה. יהיו $k,l \in \mathbb{N}$.
- נסמן ב-$\boldsymbol{M_{k\times l}(\mathrm{F}[x])}$ את קבוצת כל המטריצות מסדר $k \times l$ שאיבריהן הם פולינומים ב-$\mathrm{F}[x]$.
- נסמן ב-$\boldsymbol{M_{k\times l}(F_n[x])}$ את קבוצת כל המטריצות מסדר $k \times l$ שאיבריהן הם פולינומים ב-$\mathrm{F}_n[x]$.

למשל:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1-x^2 & 1+x & 3 \\ x & x^2 & 1-x+x^3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M_{2\times 3}(\mathbb{R}[x])}$$

$$\boldsymbol{M_{2\times 3}(\mathbb{R}_3[x])}$$

הערה 1:

הקבוצה $M_{k\times l}(\mathrm{F}[x])$ היא מ״ו מעל F (ההוכחה דומה להוכחה עבור $M_{k\times l}(\mathrm{F})$).

הקבוצה $M_{k\times l}(\mathrm{F}_n[x])$ היא תמ״ו של $M_{k\times l}(\mathrm{F}[x])$.

פולינומים

פולינום מתוקן הוא פולינום שבו המקדם של המשתנה בחזקה הגבוהה ביותר הוא 1.

הגדרה:

- יהי $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ פולינום ב-$F[x]$.
- נאמר ש-$p(x)$ **מתוקן** $(monic)$ אם $a_n = 1_F$.

למשל:

$p(x) = 1 - x^2$ ← לא מתוקן

$p(x) = 7 + 2x + x^2$ ← מתוקן

הערה: A היא מטריצה שאיבריה הם פולינומים ממעלה ראשונה לכל היותר.

למה 1:

יהי F שדה. יהי $n \in \mathbb{N}$. תהי $A \in M_n(\mathrm{F}_1[x])$.

אזי $\det(A) \in \mathrm{F}_n[x]$.

מעלת הפולינום

למשל:

$$\deg\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = 2 \qquad \deg\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 1+x & 2 \end{vmatrix} = 1$$

הוכחה: באינדוקציה על n.

בסיס: נוכיח את נכונות הטענה עבור $n = 1$.

- $n = 1$: מתקיים: $A = (a + bx)$ כאשר $a,b \in \mathrm{F}$.
- לכן: $\det(A) = (a + bx)$ ⇐ פולינום ממעלה ראשונה לכל היותר ⇐ $\det(A) \in \mathrm{F}_1[x]$

n

צעד: נניח את נכונות הטענה עבור מטריצה מסדר $n-1$ ונוכיח עבור מטריצה מסדר n.

הנחת האינדוקציה: הדטרמיננטה היא פולינום ממעלה $n-1 \geq$

- יהי $2 \leq n \in \mathbb{N}$.
- נפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \underbrace{[A]_{i1}}_{\text{פולינום ממעלה 1 לכל היותר.}} \cdot \underbrace{M_{i1}^{(A)}}_{\text{לפי ה"ה זה פולינום ממעלה } n-1 \text{ לכל היותר.}} \in \mathbf{F}_n[x]$
- לפי הנחת האינדוקציה, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים: $M_{i1}^{(A)} \in \mathrm{F}_{n-1}[x]$.
- כמו כן: $[A]_{i1} \in \mathrm{F}_1[x]$. (לפי הגדרת A)
- לכן לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים: $[A]_{i1} \cdot M_{i1}^{(A)} \in \mathrm{F}_n[x]$.
- מהיות $\mathrm{F}_n[\mathrm{x}]$ קבוצה סגורה לצירופים לינאריים $\det(A) \in \mathbf{F}_n[x]$.

הפולינום האופייני הוא מתוקן והוא ממעלה n בדיוק!

משפט 2:

יהי F שדה. יהי $n \in \mathbb{N}$. תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$.

אזי p_A הוא **פולינום מתוקן ממעלה n**.

הוכחה: באינדוקציה על n.

בסיס: נוכיח את נכונות הטענה עבור $n = 1$.

$n = 1$: במקרה זה מתקיים $A = (a)$, $a \in \mathrm{F}$. $\Leftarrow$ $\lambda - a = \det(\lambda I_1 - A) = p_A(\lambda)$

ואכן זהו פולינום מתוקן ממעלה 1.

צעד: $\underbrace{\text{נניח את נכונות הטענה עבור מטריצה מסדר } n-1}$ ונוכיח עבור מטריצה מסדר n.

הנחת האינדוקציה: הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן ממעלה $n - 1$.

- יהי $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

- נפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [\lambda I_n - A]_{i1} \cdot M_{i1}^{(\lambda I_n - A)} = \underbrace{+(\lambda - [A]_{11}) M_{11}^{(\lambda I_n - A)}}_{\text{מעלה } n \text{ בדיוק}} + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} [-A]_{i1} \cdot M_{i1}^{(\lambda I_n - A)}}_{\text{מעלה } n-1 \text{ לכל היותר}}$$

$i=1$

הוצאת מחובר 1

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - [A]_{11} & & \text{כמו } -A \\ & \ddots & \\ \text{כמו } -A & & \lambda - [A]_{nn} \end{pmatrix}$$

- נשים לב שהמינור $M_{11}^{(\lambda I_n - A)}$ הוא הפולינום האופייני של מטריצה ריבועית מסדר $n-1$ שהתקבלה מ-A ע"י השמטת השורה והעמודה הראשונה) לכן, לפי הנחת האינדוקציה זהו פולינום <u>מתוקן</u> ממעלה $n-1$.
- אם נכפיל אותו בביטוי $(\lambda - [A]_{11})$ שהינו ממעלה ראשונה, נקבל ש-$(\lambda - [A]_{11}) M_{11}^{(\lambda I_n - A)}$ מתוקן ממעלה n.
- $[-A]_{i1}$ הוא ממעלה 0 (כי אינו על האלכסון הראשי של המטריצה).
- לפי למה 1, $M_{i1}^{(\lambda I_n - A)}$ הוא פולינום ממעלה $\geq n-1$.
- לכן, $[-A]_{i1} \cdot M_{i1}^{(\lambda I_n - A)}$ ממעלה $n-1$ לכל היותר.

נחבר ונקבל ש-$p_A(\lambda)$ הוא פולינום מתוקן ממעלה n.

משפט 3: (נוסחת $Binet$ לסדרת פיבונאצ'י)

- נתבונן בסדרת פיבונאצ'י המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & \forall n \geq 2 \\ F_1 = 1 \\ F_0 = 0 \end{cases}$$

- אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\boldsymbol{F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}$$

הוכחה:

- לכל $n \in \mathbb{N}$ נתבונן בוקטור: $\boldsymbol{\vec{F}_n} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$
- כמו כן נתבונן במטריצה: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\boldsymbol{\vec{F}_n} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{F}_{n-1}$$

$$\boxed{\vec{F}_n = A \cdot \vec{F}_{n-1}}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

- כעת נוכיח ש-A לכסינה: הפולינום האופייני של A הוא:

$$p_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

- נשווה ל-0 ונקבל: $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ כלומר, ל-A יש שני ערכים עצמיים שונים ולכן היא לכסינה.
- ניתן לראות (בדקו) שהוקטורים העצמיים המתאימים הם: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- מכאן ש- $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- נחשב את P^{-1}:

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$\vec{F}_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot \vec{F}_{n-1} \quad \boxed{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{3}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \boxed{4}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \boxed{5}$$

- לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\boxed{\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}} \underset{2}{=} \vec{F}_n \underset{2}{=} A \cdot \vec{F}_{n-1} \underset{2..}{=} A^{n-1} \cdot \vec{F}_1 \underset{\text{משפט + לכסינה } A}{=} P \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \cdot \vec{F}_1 \underset{2}{=}$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} \underset{\text{הצבת } F_1, F_0 \text{ + לפי 4}}{=} P \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{חישוב}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{חישוב}} = \frac{1}{\sqrt{5}} P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} \\ -\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \underset{3}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} \\ -\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{חישוב}} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ *** \end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}$$

הפולינום האופייני של מטריצת בלוקים משולשית הוא מכפלת הפולינומים האופייניים של הבלוקים.

משפט 4:

- תהי A מטריצת בלוקים משולשית, שהבלוקים שלה הם מטריצות ריבועיות $A_1, \dots, A_k$.
- כלומר A היא מהצורה:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

- אזי: $p_A(\lambda) = p_{A_1}(\lambda) \cdot \dots \cdot p_{A_k}(\lambda)$

הוכחה:

$$\boxed{p_A(\lambda) =} \det(\lambda I_n - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}\right) =$$

הגדרת פ"א

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda I_{k_1} - A_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda I_{k_2} - A_2 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda I_{k_k} - A_k \end{pmatrix} = \det(\lambda I_n - A_1) \cdot \dots \cdot \det(\lambda I_n - A_k) =$$

מט' בלוקים

מטריצה משולשית עליונה

$$\boxed{= p_{A_1}(\lambda) \cdot \dots \cdot p_{A_k}(\lambda)}$$

מסקנה 1:

- תהי $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ מטריצה אלכסונית.
- אזי A לכסינה, הערכים העצמיים של A הם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ והזוגות העצמיים של A הם $(\lambda_1, \vec{e}_1), \dots, (\lambda_n, \vec{e}_n)$.

הוכחה:

- ידוע ש-

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda - \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

- הערכים העצמיים הם השורשים של הפולינום האופייני, **לכן הם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.**
- כמו כן, A אלכסונית, ודומה לעצמה, כאשר $P = I_n$ (הוכחנו), לכן היא לכסינה.
- ידוע שעמודות P הם הוקטורים העצמיים, כלומר הם $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

מסקנה 2:

- תהי A מטריצה משולשית עליונה. אזי הערכים העצמיים של A הם איברי האלכסון שלה.

תרגיל 3:

יהיו $\alpha,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ ונתבונן במטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

הוכיחו ש-A לכסינה אם ורק אם

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ או ($\lambda_1 = \lambda_2$ וגם $\alpha = 0$).

פתרון:

- נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$\boxed{\det(\lambda I_2 - A) =} \det\begin{pmatrix} \lambda-\lambda_1 & -\alpha \\ 0 & \lambda-\lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

- לכן הערכים העצמיים של A הם λ_1,λ_2.

- $\Rightarrow$ אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$, אז ל-A יש שני ערכים עצמיים שונים ולכן היא לכסינה.
- אם $\lambda_1 = \lambda_2$ וגם $\alpha = 0$ אז A אלכסונית בעצמה ולכן לכסינה.
- $\Leftarrow$ אם A לכסינה, נניח בשלילה ש-

$\lambda_1 = \lambda_2$ וגם ($\lambda_1 \neq \lambda_2$ או $\alpha \neq 0$).

- מפילוג נקבל: $\lambda_1 = \lambda_2$ וגם $\alpha \neq 0$.
- מהיות A לכסינה ומכיוון ש-$\lambda_1 = \lambda_2$ נקבל ש-A דומה למטריצה סקלרית.
- ממשפט שהוכחנו נסיק ש-A בעצמה מטריצה סקלרית.
- בסתירה לכך ש-$\alpha \neq 0$.

למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני.

משפט 5:

יהי F שדה. יהי $n \in \mathbb{N}$. תהיינה $A,B \in M_n(\mathrm{F})$, המקיימות $A \sim B$.

אזי $\boldsymbol{p_A(\lambda) = p_B(\lambda)}$.

הוכחה:

- מהיות $A \sim B$, הרי שקיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathrm{F})$ כך ש- $B = P^{-1}AP$.
- לכן מתקיים:

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda I_n - B}} = \lambda I_n - \underbrace{P^{-1}AP}_{\boldsymbol{B}} = \lambda \boldsymbol{P^{-1}} I_n \boldsymbol{P} - P^{-1}AP = \boldsymbol{P^{-1}} \lambda I_n \boldsymbol{P} - P^{-1}AP = \boxed{\boldsymbol{P^{-1}(\lambda I_n - A)P}}$$

- מכאן ש- $(\lambda I_n - A) \sim (\lambda I_n - B)$
- ידוע שלמטריצות דומות יש דטרמיננטות שוות. לכן:

$$\boldsymbol{p_A(\lambda)} = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - B) = \boldsymbol{p_B(\lambda)}$$

תרגיל 4:

הוכיחו או הפריכו: המטריצות $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ הן דומות.

פתרון 1: נחשב את הפולינום האופייני של כל מטריצה:

$$\boxed{p_A(\lambda) =} \det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda+1) - 6 = \boxed{\lambda^2 + \lambda - 6}$$

$$\boxed{p_B(\lambda) =} \det(\lambda I_2 - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1) = \boxed{\lambda^2 - \lambda - 2}$$

- ניתן לראות ש-$p_A(\lambda) \neq p_B(\lambda)$, לכן המטריצות אינן דומות.

פתרון 2: נחשב את העקבה של כל מטריצה:

$\boxed{Trace(A) =}$ -1

$\boxed{Trace(B) =}$ 1

- ניתן לראות שהעקבות שונות, לכן המטריצות אינן דומות.

פתרון 3: נחשב את הדטרמיננטה של כל מטריצה:

$\boxed{\det(A) =}$ -6

$\boxed{\det(B) =}$ -2

- ניתן לראות שהדטרמיננטות שונות, לכן המטריצות אינן דומות.

דוגמה:

נתבונן במטריצות: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

שוויון דטרמיננטות, עקבות ופ"א הם תנאים הכרחיים לדמיון אך לא מספיקים!

- מתקיים: $\det(B) = 1$ $\det(A) = 1$ $\boxed{\det(A) = \det(B)}$
- מתקיים: $trace(B) = 2$ $trace(A) = 2$ $\boxed{trace(A) = trace(B)}$
- מתקיים: $p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ $\boxed{p_A(\lambda) = p_B(\lambda)}$
- האם המטריצות דומות? **לא!**

מטריצת היחידה דומה רק לעצמה (הוכחנו).

שוויון הפולינום האופייני הוא תנאי הכרחי לדמיון אבל לא מספיק!

דוגמה נוספת לקריאה עצמית:

תהיינה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$P_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$$P_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \cdot \lambda = \lambda^2 - 2\lambda$$

$P_A \neq P_B$
לכן $A \nsim B$

(אפשר גם לראות לפי דטרמינטה)

תזכורת לגבי פולינומים

- יהיו $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ פולינומים ב-F[x].

- נאמר ש-$p(x) = q(x)$ אם מתקיים: **(1)** $m = n$

  (2) $\forall 0 \le i \le n: \quad a_i = b_i$

שימו לב: הפולינומים $q(x) = 1$, $p(x) = x^2 + x + 1$ מחזירים אותו ערך לכל $x \in \mathbb{Z}_2$,

אבל $p(x) \neq q(x)$ כי המקדמים שונים.

- נאמר ש-$p(x)|q(x)$ אם קיים $k(x) \in \mathrm{F}[x]$ כך ש-$q(x) = k(x) \cdot p(x)$.

למשל: $(x-1)|(x^3-1)$ כי $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$

- נאמר ש-$\alpha \in \mathrm{F}$ הוא **שורש של $p(x) \in \mathrm{F}[x]$** אם $p(\alpha) = 0_{\mathrm{F}}$.

- $\alpha \in \mathrm{F}$ הוא **שורש של $p(x)$** אם ורק אם $(x-\alpha)|p(x)$.

- אם $n = \deg(p(x))$ אזי ל-$p(x)$ יש לכל היותר n שורשים שונים ב-F (הוכחה באינדוקציה).
- לכן לכל מטריצה $A \in M_n(\mathrm{F})$ יש לכל היותר n ערכים עצמיים שונים.

שימו לב: ייתכן שלפולינום $p(x)$ אין שורשים בכלל.

למשל: לפולינום $p(x) = x^2 + 1$ אין שורשים ב-$\mathbb{R}$.

- **המשפט היסודי של האלגברה:** יהי $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. אם $\deg p(x) \geq 1$

  אז ל-$p(x)$ יש לפחות שורש אחד.

לפולינום לא קבוע מעל המרוכבים יש לפחות שורש אחד.

מסקנה 3:

- תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$. נניח ש-$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הם ערכים עצמיים שונים של A.
- אזי קיים $k(x) \in \mathrm{F}(x)$ כך ש- $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k) \cdot k(x)$

מסקנה 4:

- יהי $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. נניח ש-$n = \deg p(x) \geq 1$.
- אזי קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ וקיים $c \in \mathbb{C}$ כך ש- $\boldsymbol{p(x) = c(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)}$

כל פולינום מעל המרוכבים ניתן לפירוק לגורמים לינאריים.

מסקנה 5:

- תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$.
- אזי קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ כך ש- $\boldsymbol{p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)}$

כל פ"א מתפרק לגורמים לינאריים מעל המרוכבים.

הוכחה:

- לפי מסקנה 4, קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ וקיים $c \in \mathbb{C}$ כך ש- $\boldsymbol{p_A(\lambda)} = c(\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$
- מהיות $\boldsymbol{p_A(\lambda)}$ פולינום מתוקן מתקיים $\boldsymbol{p_A(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$ כנדרש.